

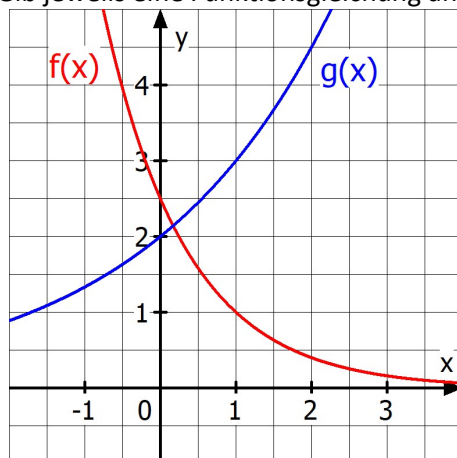
Standardaufgaben

1. Zeichne jeweils den Graphen der Funktion.

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

2. Gib jeweils eine Funktionsgleichung an.



3. Löse die Exponentialgleichungen:

a) $2^x \cdot 3 = 9$

b) $3 \cdot 2^{x-1} = 24$

c) $1,5 \cdot 2^{\frac{x}{3}} = 15$

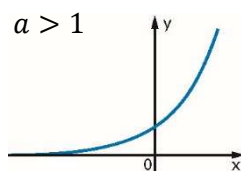
Grundwissen M10**A. Exponentielles Wachstum und Logarithmus**

A.1 Exponentialfunktion: $f(x) = b \cdot a^x$ ($a > 0$)
mit Startwert b und Wachstumsfaktor (bzw. Abnahmefaktor) a

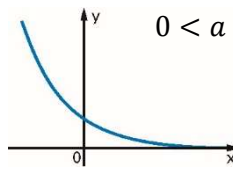
Eigenschaften

- $D = \mathbb{R}$
- $W = \mathbb{R}^+$ (für $b > 0$) bzw. $W = \mathbb{R}^-$ (für $b < 0$)
- Schnittpunkt mit der y-Achse bei $Y(0|b)$
- waagerechte Asymptote: x-Achse
- mit wachsendem x nehmen die Funktionswerte für $a > 1$ zu (exponentielle Zunahme), für $a < 1$ ab (exponentielle Abnahme).

$a > 1$



$0 < a < 1$

**A.2 Exponentialgleichung und Logarithmus**

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$$

Die **Exponentialgleichung** $a^x = b$ ($a, b \in \mathbb{R}^+; a \neq 1; x \in \mathbb{R}$) hat genau eine Lösung, die man als **Logarithmus von b zur Basis a** bezeichnet: $x = \log_a(b)$.

Der Logarithmus von b zur Basis a ist also derjenige Exponent, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um b zu erhalten. Es gilt:

- $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a(1) = 0$
- $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a(a) = 1$
- $\log_{10}(x) = \lg(x)$

Rechenregel: $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$

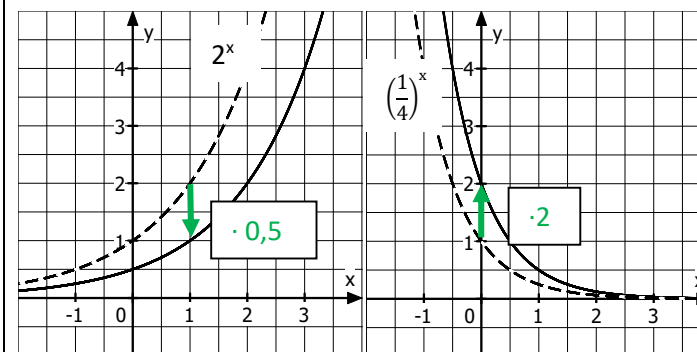
Beispielaufgaben

Zeichne jeweils den Graphen zu

$f(x) = 0,5 \cdot 2^x$

und

$g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$



Hinweis: Gestrichelt gezeichnet sind jeweils die Grundfunktionen 2^x und $\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Löse die Exponentialgleichungen.

$3^x = 5$

oder

$3^x = 5 \mid \lg$

$x = \log_3(5)$

$\lg(3^x) = \lg(5)$

$x \cdot \lg(3) = \lg(5) \mid : \lg(3)$

$$x = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} = \log_3(5)$$

$2^{x+1} \cdot 3^x = 72$

$2^x \cdot 2 \cdot 3^x = 72 \mid : 2$

$(2 \cdot 3)^x = 36$

$6^x = 36$

$x = \log_6(36)$

$x = 2$

4. Eine faire Münze ($P(\text{„Zahl“}) = P(\text{„Kopf“}) = \frac{1}{2}$) wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse.

- Es erscheint genau zweimal Zahl.
- Der erste und der letzte Wurf sind Kopf.

B. Zusammengesetzte Zufallsexperimente und stochastische Simulationen

Ein **mehrstufiges Zufallsexperiment** besteht aus mehreren Telexperimenten. Jedes Ergebnis stellt genau einen **Pfad** im zugehörigen **Baumdiagramm** dar und wird als **n-Tupel** $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ geschrieben.

Pfadregeln:

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

Simulation: Nachahmung eines Zufallsexperiments durch ein anderes mit gleichen Wahrscheinlichkeiten.

Aus einer Urne mit zwei schwarzen und drei weißen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne diese zurückzulegen.

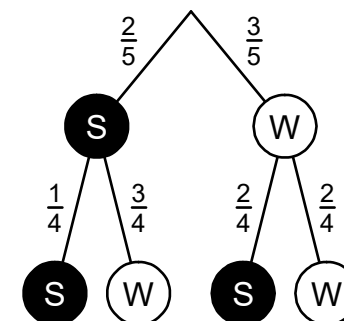
Ergebnisraum:

$$\Omega = \{SS; SW; WS; WW\}$$

Bsp. zur 1. Pfadregel:

$$P(SS) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(WW) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$



Bsp. zur 2. Pfadregel:

$P(\text{„verschieden“}) =$

$$= P(SW) + P(WS) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

C. Sinus- und Kosinusfunktion

Gegeben ist ein Winkel α im Gradmaß. Sein **Bogenmaß** ist die zugehörige Maßzahl der Bogenlänge x am Einheitskreis. Für die Umrechnung gilt: $\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180^\circ}$

Beachte: Beim Rechnen im Bogenmaß stelle den Taschenrechner (TR) auf RAD!

Geg.: $\alpha = 45^\circ$; Ges.: Winkel im **Bogenmaß**

$$x = \frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{1}{4} \pi = \frac{\pi}{4}$$

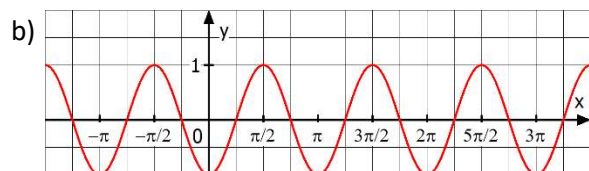
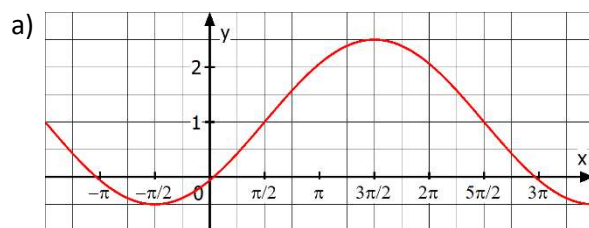
5. Gib jeweils alle Lösungen im Intervall $[0; 2\pi[$ an.

- a) $\sin x = 1$
- b) $\sin x = 0,5$
- c) $\cos x = -0,5$
- d) $\sin 2x = 0$

6. Zeichne jeweils den Graphen der Funktion.

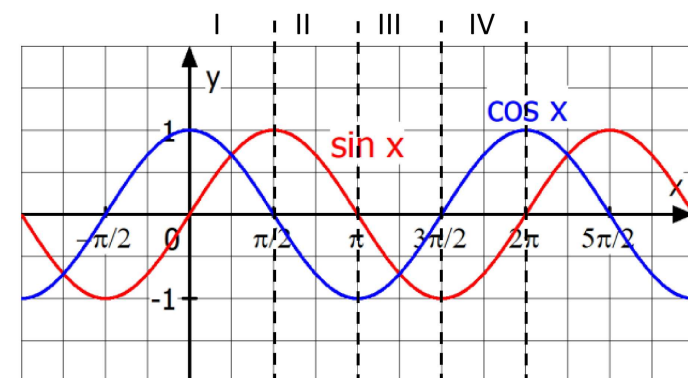
- a) $f(x) = 2 \cdot \cos(x) - 1$ [rot]
- b) $f(x) = -\sin(0,5x)$ [blau]
- c) $f(x) = \sin(-x + \frac{\pi}{3})$ [grün]

7. Gib jeweils eine Funktionsgleichung zu den folgenden Graphen an.



Trigonometrische Funktionen:

$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$
$D = \mathbb{R}; W = [-1; 1]; \text{Periode } P = 2\pi$	
Punktsymmetrie zum Ursprung (0 0) $\sin(-x) = -\sin x$	Achsensymmetrie zur y-Achse $\cos(-x) = \cos x$



Allgemeine Sinusfunktion $y = a \cdot \sin(b((x+c))) + d$
mit Amplitude $|a|$ und Periodenlänge $P = \frac{2\pi}{|b|}$.

Ihr Graph entsteht aus dem Graphen von $\sin x$ durch...

1. Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$
 2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $|a|$
 3. Spiegelung an der y-Achse, wenn $b < 0$
 4. Spiegelung an der x-Achse, wenn $a < 0$
 5. Verschieben um $|c|$ nach rechts ($c < 0$)/links ($c > 0$)
 6. Verschieben um $|d|$ nach oben ($d > 0$)/unten ($d < 0$).
- >>Reihenfolge beachten: Strecken-Spiegeln-Verschieben!!<<

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\sin x = -0,6$.

Äquivalente Aufgabe: Für welche Werte von x schneidet der Graph der Sinusfunktion die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = -0,6$?

für $x \in [0; 2\pi[$:

- $\sin x = -0,6$
TR " $\sin^{-1}(-0,6)$ " liefert negative Lösung, die nicht im Intervall $[0; 2\pi[$ liegt.
- zugehörigen Wert im I. Quadranten bestimmen:
 $\sin \hat{x} = +0,6$
 $\hat{x} \approx 0,64$
- Sinus ist im III. und IV. Quadranten negativ:
 $x_1 = \pi + 0,64 \approx 3,78$; $x_2 = 2\pi - 0,64 \approx 5,64$

für $x \in \mathbb{R}$:

$$x_{1,k} = x_1 + 2k\pi = \pi + 0,64 + 2k\pi \approx 3,78 + 2k\pi$$

$$x_{2,k} = x_2 + 2k\pi = 2\pi - 0,64 + 2k\pi \approx 5,64 + 2k\pi$$

(mit $k \in \mathbb{Z}$)

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\cos x = -0,6$.

für $x \in [0; 2\pi[$:

- zugehöriger Wert im I. Quadranten:
 $\cos \hat{x} = +0,6 \rightarrow \hat{x} \approx 0,93$
- Kosinus ist im II. und III. Quadranten negativ:
 $x_1 = \pi - 0,93 \approx 2,21$; $x_2 = \pi + 0,93 \approx 4,07$

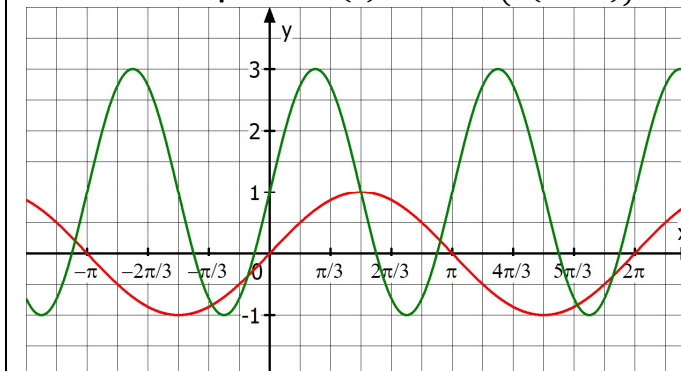
für $x \in \mathbb{R}$:

$$x_{1,k} = x_1 + 2k\pi = \pi - 0,93 + 2k\pi \approx 2,21 + 2k\pi$$

$$x_{2,k} = x_2 + 2k\pi = \pi + 0,93 + 2k\pi \approx 4,07 + 2k\pi$$

(mit $k \in \mathbb{Z}$)

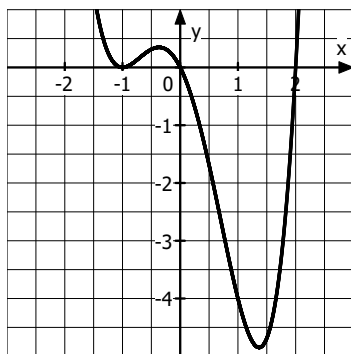
Zeichne den Graphen zu $f(x) = 2 \cdot \sin(2(x - \pi)) + 1$.



8. Gib das Verhalten der ganzrationalen Funktion f für betragsmäßig große x -Werte an, ermittle die Nullstellen der Funktion und faktorisiere den Funktionsterm so weit wie möglich. Skizziere damit den groben Verlauf des Graphen.

- a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$
 b) $f(x) = -x^3 + 4x$
 c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$
 d) $f(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$

9. Bestimme zum abgebildeten Graphen eine Gleichung der zugehörigen ganzrationalen Funktion f . (Hinweis: $a_n = 1$)



D. Ganzrationale Funktionen

sind Funktionen, die als Summen von Potenzfunktionen geschrieben werden können.

$$f(x) = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}_{\text{Polynom n-ten Grades}} \quad \text{mit } a_n \neq 0$$

Faktorierte Form:

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n) \quad \text{mit } a_n \neq 0$$

Nullstellen (Nst) bestimmt man durch Gleichsetzen der ganzrationalen Funktion mit Null ($f(x) = 0$) und bekannte Lösungsverfahren für Gleichungen (Ausklammern, Lösungsformel, Wurzelziehen etc.).

Eine **biquadratische Gleichung** $a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 = 0$ kann mithilfe einer **Substitution** auf eine quadratische Funktion zurückgeführt werden. Dabei wird x^2 durch z ersetzt ($x^2 = z$; $x^4 = z^2$).

Die **Vielfachheit einer Nullstelle** gibt an, wie oft der entsprechende Faktor in der faktorierten Form der ganzrationalen Funktion enthalten ist.

Ist die Vielfachheit einer Nst

- ungerade, so wechselt der Graph an der Nst die Seite der x -Achse („Nst mit Vorzeichenwechsel“)
- gerade, so wechselt der Graph an der Nst die Seite der x -Achse nicht („Nst ohne Vorzeichenwechsel“)

Je größer die Vielfachheit der Nst ist, desto mehr schmiegt sich der Graph in der Nähe der Nullstelle an die x -Achse an.

Verhalten an den Rändern

Für betragsmäßig große x -Werte verläuft der Graph der ganzrationalen Funktion genauso wie die Potenzfunktion mit dem höchsten Exponenten, die im Polynom enthalten ist. (siehe Grundwissen 9. Klasse, F.1)

Aufgabe: Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$.

- Substituiere $x^2 = z$ (und demnach $x^4 = z^2$):
 $f(x) = z^2 - 5z + 6$
- Nullstellen des neuen Funktionsterms (mittels Lösungsformel): $z_1 = 2$; $z_2 = 3$
- Die Rücksubstitution ergibt zwei Gleichungen, die gelöst werden:

$$\begin{aligned} x^2 = 2 \quad | \sqrt{\dots} & \quad x^2 = 3 \quad | \sqrt{\dots} \\ x_1 = \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2} & \quad x_3 = \sqrt{3}; x_4 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

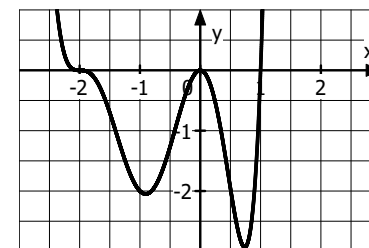
Aufgabe:

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = (x - 1) \cdot x^2 \cdot (x + 2)^3$. Ermittle die Nullstellen der Funktion, gib das Verhalten des Funktionsgraphen für betragsmäßig große x -Werte an und skizziere damit den groben Verlauf des Graphen.

Funktionsterm ist bereits in faktorisierter Form gegeben
 $\Rightarrow$ Nst können mit ihrer Vielfachheit direkt abgelesen werden

- $x_1 = 1 \rightarrow$ einfache Nst mit Vorzeichenwechsel
 $x_2 = 0 \rightarrow$ doppelte Nst ohne Vorzeichenwechsel
 $x_3 = -2 \rightarrow$ dreifache Nst mit Vorzeichenwechsel

Ausmultiplizierte Form $f(x) = x^6 + 5x^2 + 6x^4 - 4x^3 - 8x^2$
 $\rightarrow$ Verhalten an den Rändern: „von links oben nach rechts oben“



10. Überprüfe auf Symmetrie.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

b) $f(x) = -8x^2 + 8x$

c) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x) + 1$

Symmetrie von Funktionsgraphen

Achsensymmetrie zur y-Achse $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$
 $\Leftrightarrow$ Funktion f „gerade“

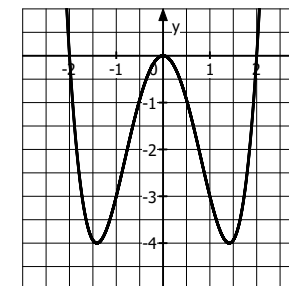
Punktsymmetrie zum Ursprung $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$
 $\Leftrightarrow$ Funktion f „ungerade“

Ganzrationale Funktionen sind genau dann

- gerade, wenn alle vorkommenden Exponenten gerade sind,
- ungerade, wenn alle vorkommenden Exponenten ungerade sind.

Aufgabe:

Gib zum gegebenen Graphen eine Gleichung der zugehörigen Funktion.



$$f(x) = (x + 2)x^2(x - 2)$$

Aufgabe: Überprüfe $f(x) = x^3 - x$ auf Symmetrie.

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

(auch zu erkennen an den ausschließlich ungeraden Exponenten)

11. Eine gerade quadratische Pyramide ist 6 cm hoch und hat ein Volumen von 162 cm^3 . Bestimme a, s, h_a, M, O, α und β .

12. Der Oberflächeninhalt eines geraden Kegels beträgt $24\pi\text{ dm}^2$, der Kreis seiner Grundfläche hat den Radius 3 dm . Bestimme h, m, μ und V .

13. Berechne das Volumen einer Kugel mit einem Oberflächeninhalt von $36\pi\text{ m}^2$.

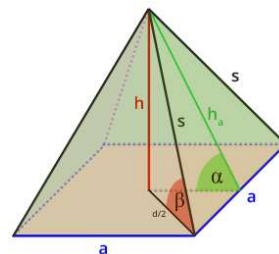
E. Raumgeometrie

Pyramide

Oberfläche

$$O_{\text{Pyramide}} = G + A_{\text{Dreiecke}}$$

$$\text{Volumen } V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$



Kegel

Volumen

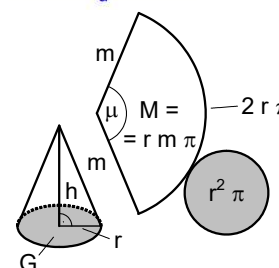
$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Oberfläche

$$O_{\text{Kegel}} = G + M = \pi r^2 + \pi r m$$

Mittelpunktswinkel des Kreissektors

$$(\text{abgewickelter Mantel}): \frac{\mu}{360^\circ} = \frac{r}{m}$$



Bei der **schiefen Pyramide** und dem **schiefen Kegel** liegt die Spitze nicht senkrecht über dem Mittelpunkt eines geraden Vielecks (vgl. **gerade Pyramide**) bzw. über dem Mittelpunkt des Kreises (vgl. **gerader Kegel**). Das Volumen lässt sich jeweils mit der gleichen Formel berechnen wie bei der geraden Pyramide bzw. dem geraden Kegel.

Kugel

$$\text{Oberfläche } O_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$$

$$\text{Volumen } V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Eine gerade Pyramide ist 4 cm hoch und ihre quadratische Grundfläche hat die Kantenlänge 6 cm . Bestimme s, h_a, M, O, V, α und β .

$$h_a: h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow h_a = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7}\text{ cm}$$

$$M: M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = 12\sqrt{7}\text{ cm}^2 \approx 31,7\text{ cm}^2$$

$$O: O = G + M = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \approx 67,7\text{ cm}^2$$

$$V: V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 48\text{ cm}^3$$

$$s: s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 5,8\text{ cm}$$

$$\alpha: \tan \alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \alpha \approx 53,1^\circ$$

$$\beta: \tan \beta = \frac{h}{\frac{d}{2}} = \frac{h}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \beta \approx 43,3^\circ$$

Ein gerader Kegel ist 6 cm hoch, der Kreis seiner Grundfläche hat den Radius 8 cm . Bestimme m, μ, V und O .

$$m: m^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow m = \sqrt{r^2 + h^2} = 10\text{ cm}$$

$$\mu: \mu = \frac{r}{m} \cdot 360^\circ = 288^\circ$$

$$V: V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = 128\pi \approx 402,1\text{ cm}^3$$

$$O: O = \pi r^2 + \pi r m = 144\pi \approx 452,4\text{ cm}^2$$

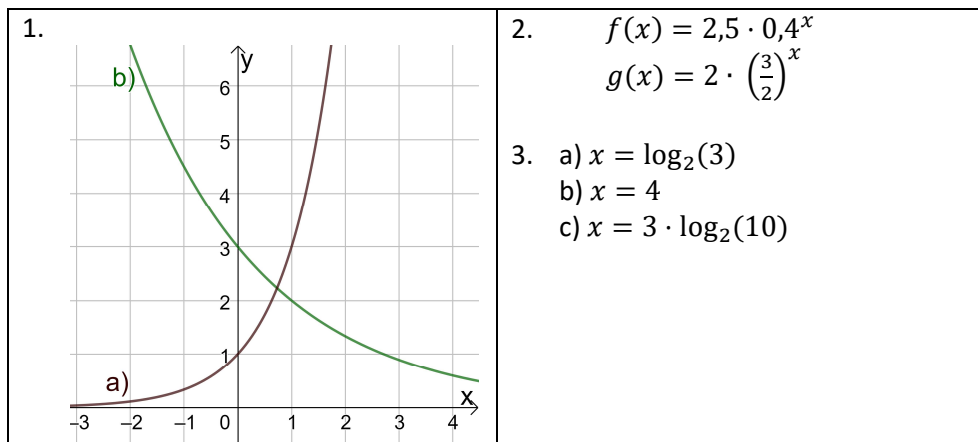
Eine Kugel hat den Radius 2 dm .

Berechne Oberflächeninhalt und Volumen.

$$O_{\text{Kugel}} = 4\pi \cdot (2\text{ dm})^2 = 16\pi\text{ dm}^2 \approx 50\text{ dm}^2$$

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi \cdot (2\text{ dm})^3 = \frac{32}{3} \pi\text{ dm}^3 \approx 34\text{ dm}^3$$

Ergebnisse zu den Aufgaben



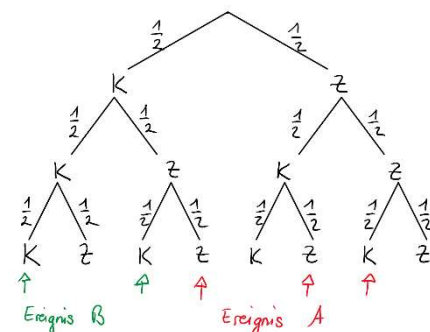
4. a) $A = \{ZZK; ZKZ; KZZ\}$

1. Pfadregel: $P(ZZK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};$

$P(ZKZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};$

$P(KZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

2. Pfadregel: $P(A) =$
 $= P(ZZK) + P(ZKZ) + P(KZZ) =$
 $= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 37,5\%$

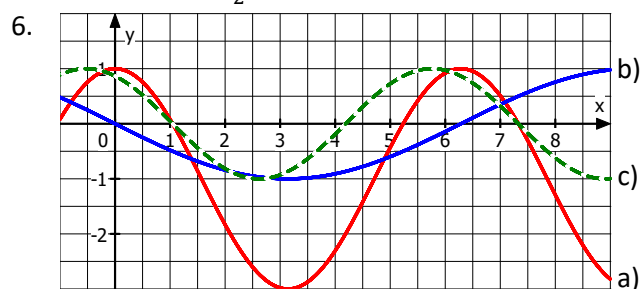


b) $B = \{KZK; KKK\}$

1. Pfadregel: $P(KZK) = P(KKK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

2. Pfadregel: $P(B) = P(KZK) + P(KKK) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$

5. a) $x = \frac{\pi}{2}$; b) $x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$; c) $x_1 = \frac{2\pi}{3}$; $x_2 = \frac{4\pi}{3}$; d) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$;
 $x_3 = \pi$; $x_4 = \frac{3\pi}{2}$

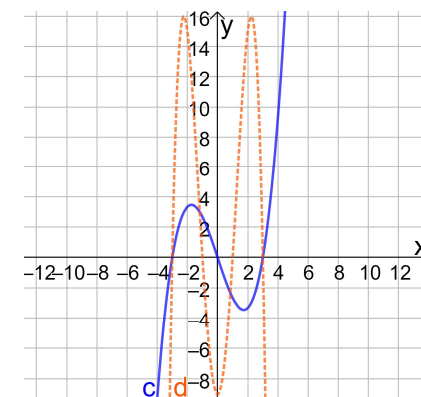
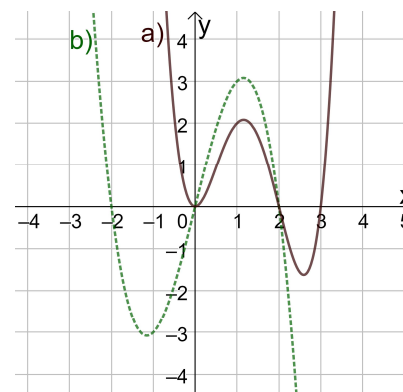


..

7. a) $f(x) = 1,5 \cdot \sin\left(0,5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1$ b) $f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

8.

	Verlauf	Nullstellen	Faktorierte Form
a)	„von links oben nach rechts oben“	$x_1 = 0$ (2-fach) $x_2 = 2$ (1-fach) $x_3 = 3$ (1-fach)	$f(x) = x^2(x-2)(x-3)$
b)	„von links oben nach rechts unten“	$x_1 = 0$ (1-fach) $x_2 = 2$ (1-fach) $x_3 = -2$ (1-fach)	$f(x) = -x(x-2)(x+2)$
c)	„von links unten nach rechts oben“	$x_1 = 0$ (1-fach) $x_2 = 3$ (1-fach) $x_3 = -3$ (1-fach)	$f(x) = \frac{1}{3}x(x-3)(x+3)$
d)	„von links unten nach rechts unten“	$x_1 = 1$ (1-fach) $x_2 = -1$ (1-fach) $x_3 = 3$ (1-fach) $x_4 = -3$ (1-fach)	$f(x) = -(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$



9. $f(x) = (x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2)$

10. a)+c) achsensymmetrisch zur y-Achse b) keine Symmetrie

11. $a = 9 \text{ cm}$; $s \approx 8,7 \text{ cm}$; $h_a = 7,5 \text{ cm}$; $M = 135 \text{ cm}^2$; $O = 216 \text{ cm}^2$;
 $\alpha \approx 53,1^\circ$; $\beta \approx 43,3^\circ$

12. $h = 4 \text{ dm}$; $m = 5 \text{ dm}$; $\mu = 216^\circ$; $V \approx 37,7 \text{ dm}^3$

13. $r = 3 \text{ m}$; $V = 36\pi \text{ m}^3 \approx 113,1 \text{ m}^3$