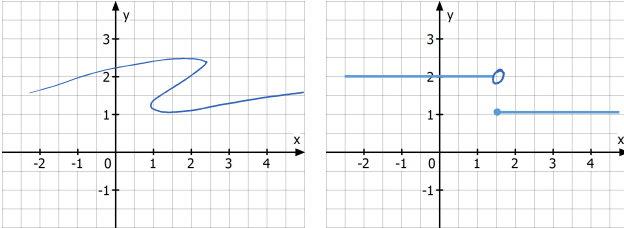


## Standardaufgaben

- Gehört die Zuordnung zu einer Funktion? Begründe!
  - Ort auf Rennstrecke  $\mapsto$  Geschwindigkeit
  - Quersumme einer Zahl  $\mapsto$  Zahl
  - Zeit  $\mapsto$  Füllhöhe eines Heizungstanks
  - Graphen:

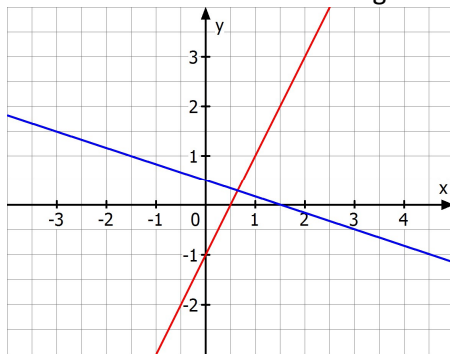


- Berechne die Funktionswerte für  $x \in \{-2; 0; 1,5; 7\}$  zur Funktion  $f(x) = -2x^2 + 4$
- Bestimme die passende Funktion zu folgender Wertetabelle:

|   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4  |
| y | 4 | 6 | 8 | 10 |

- Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit  $r=7$  cm!

- Geg.: Funktion  $y = -1,5x + 2,5$ 
  - Zeichne den Graph mit Hilfe eines Steigungsdreiecks und lege eine Wertetabelle für  $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$  an.
  - Berechne die Schnittpunkte mit beiden Achsen!



## Grundwissen M8

## A.1 Die Funktion

Eine Funktion ist eine **eindeutige Zuordnung**. („Jedem x-Wert wird **genau ein** y-Wert zugeordnet“)

Funktion f:

$f: x \mapsto y$  **Zuordnungsvorschrift**

$f(x)$  z.B.  $f(x) = 2x + 3$

$\nwarrow$  Funktionsform  $\nearrow$

$y = f(x)$  z.B.  $y = 2x + 3$

$\nwarrow$  Funktionsgleichung  $\nearrow$

$D_f$  und  $W_f$  **Definitions- und Wertemenge**

Darstellung durch **Wertetabellen, Pfeildiagramme und Graphen**

## A.2 Lineare Funktionen

Funktionsgleichung:

$$f(x) = mx + t$$

$\nwarrow$  Steigung  $\nearrow$  y-Achsenabschnitt

Höhenzuwachs

$$m = \frac{\text{Höhenzuwachs}}{\text{waagrechte Veränderung}}$$

Liegen  $P(x_P/y_P)$  und  $Q(x_Q/y_Q)$  auf der Geraden, so gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Schnittpunkte mit den Achsen:

-  $S_x(x_N/0)$   $x_N$  heißt dann Nullstelle.

Berechnung über  $f(x_N) = 0$

-  $S_y(0/t)$

## Beispiele

Zuordnung „Tagestemperatur“:

$f$ : Tageszeit  $\mapsto$  Temperatur

„zu einer bestimmten Tageszeit herrscht (an einem festen Ort) genau eine Temperatur“

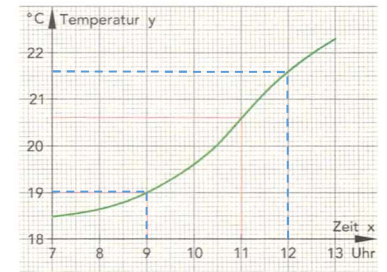
$\Rightarrow$  eindeutig

$\Rightarrow$  Funktion

9 h  $\mapsto$  19°C

12 h  $\mapsto$  21,6°C

$$f(10h) = 19,6^\circ\text{C}$$



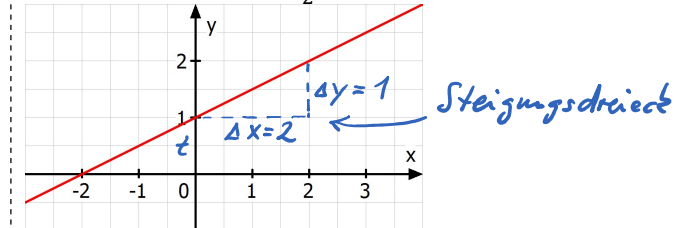
## Die Kreisfläche

Der Flächeninhalt A ist eine quadratische Funktion des Radius r:

$$A(r) = \pi \cdot r^2$$

|                               |      |       |        |
|-------------------------------|------|-------|--------|
| Radius r/cm                   | 1    | 3     | 9      |
| Kreisfläche A/cm <sup>2</sup> | 3,14 | 28,26 | 254,34 |

Geg.: Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$  mit  $D = \mathbb{Q}$



Schnittpunkte mit den Achsen:

- Nullstelle  $\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x = -2$

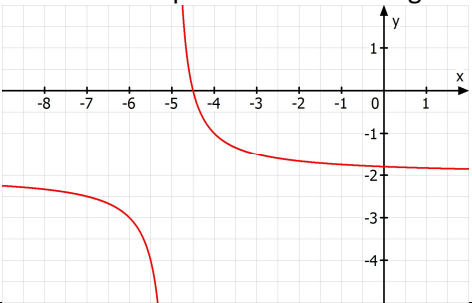
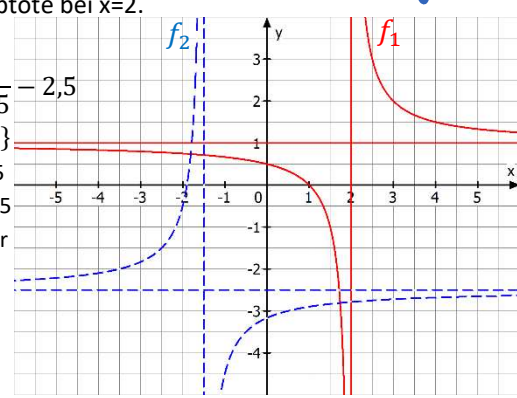
$S_x(-2/0)$  und  $S_y(0/1)$   $\nwarrow$  y-Abschnitt

Geg.:  $P(-3/4)$  und  $Q(5/-2)$ . Berechne die lineare Funktion, deren Graph durch P und Q geht.

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-2 - 4}{5 - (-3)} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$P_1 \text{ in } y = -\frac{3}{4}x + t \text{ einsetzen: } 4 = -\frac{3}{4}(-3) + t$$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |        |   |   |    |      |       |       |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|---|---|----|------|-------|-------|--------|
| <p>7. Bestimme die Gleichung der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte A(-18/17) und B(18/-13) geht.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $\Rightarrow t = 1\frac{3}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |   |   |    |      |       |       |        |
| <p>8. Sind folgende Zuordnungen direkt proportional? Begründe!</p> <p>a) Anzahl von Kisten <math>\mapsto</math> Höhe eines Stapels dieser Kisten</p> <p>b) Gewicht eines Briefs <math>\mapsto</math> Porto (Briefmarke) fürs Verschicken</p> <p>9. Vier Kiwis kosten 1,20 €, wieviel kosten 13 Kiwis?</p> <p>10. An der Tankstelle steht: 1,30 €/l für Benzin. Wieviel kosten 45 l, wieviel 60 l? Stelle den Zusammenhang Benzinmenge und Preis grafisch dar!</p>                                                                                                                                                                                                                                              | <p><b>Direkte Proportionalität</b> als lineare Funktion:<br/><b>Funktionsgleichung</b> <math>y = mx</math> (mit <math>t = 0</math>)<br/>Merkmale einer direkten Proportionalität:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Graph ist <b>Ursprungsgerade</b>.</li><li>- „jedem <b>n-fachen</b> Wert der einen Größe wird der <b>n-fache</b> Wert der anderen Größe zugeordnet“</li><li>- Wertepaare sind <b>quotientengleich</b>:<br/><math>\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = m</math> mit konstantem <math>m</math></li></ul>                                                                                                                                                            | <p><b>Berechnung des Kreisumfangs:</b><br/>„zu jedem Radius gibt es genau einen Umfang des Kreises“ <math>\Rightarrow</math> eindeutig <math>\Rightarrow</math> Funktion<br/><math>u</math>: Radius <math>\mapsto</math> Umfang<br/><math>u(r) = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d</math><br/>- „Bei <b>Verdopplung</b> des Radius <b>verdoppelt sich auch</b> der Umfang“</p> <table><tr><td>r/cm</td><td>3</td><td>6</td><td>18</td></tr><tr><td>U/cm</td><td>18,85</td><td>37,70</td><td>113,10</td></tr></table>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | r/cm   | 3 | 6 | 18 | U/cm | 18,85 | 37,70 | 113,10 |
| r/cm                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 18     |   |   |    |      |       |       |        |
| U/cm                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 18,85                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 37,70                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 113,10 |   |   |    |      |       |       |        |
| <p>11. Ein Gasthaus hat nur Einzel- und Doppelzimmer. Es gibt 78 Zimmer mit insgesamt 119 Betten. Wie viele Einzel- und Doppelzimmer gibt es? Löse mithilfe eines Gleichungssystems!</p> <p>12. Eine zweistellige Zahl wird um 9 größer, wenn man ihre Ziffern vertauscht. Ihre Zehnerziffer ist halb so groß wie ihre Einerziffer. Wie heißt die Zahl? Löse mithilfe eines Gleichungssystems!</p> <p>13. Ermittle grafisch und rechnerisch jeweils die Lösungsmenge!</p> <p>a) (I) <math>2y - x = 1</math><br/>(II) <math>y = \frac{1}{2}x - 4</math></p> <p>b) (I) <math>2y - 3x = -2</math><br/>(II) <math>2y + 2x = 8</math></p> <p>c) (I) <math>y - 2x = 1,5</math><br/>(II) <math>3 + 4x = 2y</math></p> | <p><b>A.3 Lineare Gleichungssysteme</b></p> <p>(I) <math>\frac{2}{3}x + y = 5</math><br/>(II) <math>-0,5x + y = -2</math></p> <p>Lösung<br/><math>L = \{(6 1)\}</math><br/>↑<br/>Zahlenpaar!</p> <p>Alle Zahlenpaare, die beide Gleichungen erfüllen, gehören zur <b>Lösungsmenge</b>.<br/>Ein lineares Gleichungssystem kann entweder <b>genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen</b> haben!<br/>Grafisch gesehen bedeutet das:<br/>Die Geraden der beiden Gleichungen <b>schneiden sich (eine Lösung: <math>S(x_s/y_s)</math>)</b>, sie liegen <b>parallel zueinander (keine Lösung)</b> oder sie <b>liegen aufeinander (unendlich viele Lösungen)</b>.</p> <p>Grafische Lösung:</p> | <p><b>Additionsverfahren:</b><br/>(I) <math>-3x + 4y = 20</math><br/>(II) <math>3x + 5y = -2</math><br/>(I) + (II) <math>-3x + 4y + (3x + 5y) = 20 + (-2)</math><br/><math>9y = 18 \quad   :9</math><br/><math>y = 2</math><br/><math>y</math> in (II): <math>3x + 5 \cdot 2 = -2 \quad   -10</math><br/><math>3x = -12</math><br/><math>x = -4 \quad L = \{(-4 2)\}</math></p> <p><b>Einsetzverfahren:</b><br/>(I) <math>x - 2y = 5</math><br/>(II) <math>5x - 3y = 11</math><br/>(I)' <math>x = 5 + 2y</math><br/>(I)' in (II) <math>5 \cdot (5 + 2y) - 3y = 11</math><br/><math>25 + 7y = 11</math><br/><math>7y = -14</math><br/><math>y = -2</math><br/><math>y</math> in (I)' <math>x = 5 + 2 \cdot (-2)</math><br/><math>x = 1 \quad L = \{(1 -2)\}</math></p> <p><b>Gleichsetzverfahren:</b><br/>(I) <math>y = 2x - 4</math><br/>(II) <math>y = 11 - 3x</math><br/>(I) = (II) <math>2x - 4 = 11 - 3x</math><br/><math>5x = 15</math></p> |        |   |   |    |      |       |       |        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <p>Es gibt drei Lösungsverfahren:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Additionsverfahren</b></li> <li>- <b>Einsetzverfahren</b></li> <li>- <b>Gleichsetzverfahren</b><br/>(vgl. Beispiele nebenan)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $x = 3$ $y = 2 \cdot 3 - 4$ $y = 2$ $L = \{(3 2)\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p>14. Sind folgende Zuordnungen indirekt proportional? Begründe!</p> <p>a) Seitenlänge eines Quadrats <math>\mapsto</math> Flächeninhalt des Quadrats</p> <p>b) Kraft (Gewicht) <math>\mapsto</math> Abstand vom Drehpunkt einer Wippe (Wippe bleibt im Gleichgewicht)</p> <p>15. Asterix und Obelix sitzen auf einer Wippe. Obelix wiegt <math>4x</math> so viel wie Asterix, der ein Gewicht von 45 kg hat. Die Wippe ist insgesamt 6,00 m lang. Wo muss Obelix sitzen, wenn Asterix ganz außen sitzt und die Wippe sich im Gleichgewicht befindet?</p> <p>16. Gib zu den folgenden Funktionen die Definitionsmengen an und zeichne die Graphen mit Hilfe der Asymptoten in ein geeignetes KOS:</p> <p>a) <math>g(x) = \frac{1}{x-3} - 1,5</math></p> <p>b) <math>h(x) = \frac{-1}{x+1} + 2</math></p> <p>17. Bestimme die passende Funktionsgleichung:</p>  | <p><b>B.1 Bruchfunktionen</b><br/><b>Indirekte Proportionalität</b> als Bruchfunktion (Variable, hier <math>x</math>, steht im Nenner!):</p> <p><b>Funktionsgleichung</b> <math>y = \frac{c}{x}</math> mit <math>D_f = \mathbb{Q} \setminus \{0\}</math></p> <p>Merkmale einer direkten Proportionalität:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Graph ist <b>Hyperbel</b>.</li> <li>- „jedem <b>n-fachen</b> Wert der einen Größe wird der <b>n-te Teil</b> (<math>\frac{1}{n}</math>-fache) der anderen Größe zugeordnet“</li> <li>- Wertepaare sind <b>produktgleich</b>:<br/><math>x_1 y_1 = x_2 y_2 = c</math> mit konstantem <math>c</math></li> </ul> <p><b>Allgemeine Bruchfunktionen</b> (mit einer 1 im Zähler)</p> $f(x) = \frac{\pm 1}{x-a} + b \text{ mit } D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$ <p>Der Graph ist eine <b>Hyperbel</b>.</p> <p><b>Senkrechte Asymptote:</b> <math>x = a</math> (<b>Definitionslücke</b>, Verschiebung nach rechts/links)</p> <p><b>Waagrechte Asymptote:</b> <math>y = b</math> (Verschiebung nach oben/unten)</p> <p>Für <b>-1 im Zähler</b> gilt: <b>Spiegelung</b> an der waagrechten Asymptote (Graph liegt im II. und IV. Quadranten des Asymptotenkreuzes).</p> | <p>Zusammenhang Geschwindigkeit und benötigte Zeit bei gleicher Strecke:</p> <p>z. B.: <math>t = \frac{3 \text{ km}}{v}</math> mit <math>t &gt; 0</math></p> <p>Indirekt proportional, da bei einer <b>Verdopplung</b> der Geschwindigkeit nur die <b> Hälfte </b> der Zeit für die gleiche Strecke benötigt wird.</p> <p>Produktgleich:</p> $t \cdot v = 3 \text{ km konstant}$ $0,5 \text{ h} \cdot \frac{6 \text{ km}}{h} = 3 \text{ km}$ $6 \text{ min} \cdot 30 \text{ km/h} = 3 \text{ km}$ <p>Beispiele Bruchfunktionen:</p> <p><math>f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1</math> ← Verschiebung um 1 nach oben<br/>für <math>x = 2</math> wird der Nenner 0!<br/><math>\Rightarrow D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}</math><br/><math>\Rightarrow</math> senkr. Asymptote bei <math>x=2</math>.</p> <p><math>f_2(x) = \frac{-1}{x+1,5} - 2,5</math><br/><math>D = \mathbb{Q} \setminus \{-1,5\}</math><br/>senkr. Asy. <math>x = -1,5</math><br/>waagr. Asy. <math>y = -2,5</math><br/>Spiegelung an der waagr. Asy.</p>  |

18. Vereinfache so weit wie möglich!

$$\text{a) } \frac{-18a^3b}{-27ab^3}$$

$$\text{b) } \frac{xy+y}{xy}$$

19. Fasse zu einem Bruch zusammen und vereinfache!

$$\text{a) } \frac{a+1}{a^2} - \frac{1}{a}$$

$$\text{b) } \frac{2x}{y-x} + 1$$

$$\text{c) } \frac{6}{2(a-b)} + \frac{a+b}{ab} - \frac{3}{a-b}$$

20. Löse die Gleichungen! Beachte die Definitionsmenge!

$$\text{a) } 24 = \frac{6}{x}$$

$$\text{b) } 8 + \frac{1}{y} = \frac{5}{y}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x+2} = \frac{-1}{x-5,5}$$

$$\text{d) } \frac{4}{x-1} = \frac{1}{x+2}$$

$$\text{e) } \frac{2x}{x+1} = \frac{3}{x-1} + 2$$

21. Die Linsenformel beschreibt den Zusammenhang zwischen der Brennweite f, der Gegenstandsweite g und der Bildweite b bei einer Linse:  $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ .

- a) Löse die Linsenformel nach g auf, indem du mit dem Hauptnenner durchmultiplizierst!
- b) Berechne g für den Fall, dass f = 20 cm und b = 1,2 m.

**B.2 Bruchterme und Bruchgleichungen****Bruchterme:** *Differenz  $\rightarrow$  faktorisieren  $\rightarrow$  Produkt  $\rightarrow$  kürzen!*

$$\frac{x^2 - 4x}{6x} = \frac{x \cdot \cancel{x} - 4 \cdot \cancel{x}}{6 \cdot \cancel{x}} = \frac{(x-4) \cdot \cancel{x}}{6 \cdot \cancel{x}} = \frac{x-4}{6}$$

In Summen und Differenzen darf **nicht** gekürzt werden.  
 Deswegen: **Faktorisieren** (z. B. durch Ausklammern)

Zum **Addieren/Subtrahieren** Brüche **gleichnamig** machen  
 ( $\Rightarrow$  „auf den **Hauptnenner** bringen“):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1 \cdot y}{x \cdot y} + \frac{1 \cdot x}{y \cdot x} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{y+x}{xy}$$

**Bruchgleichungen:**

Eine Gleichung, in der mindestens ein Bruchterm  
 (Variable im Nenner) vorkommt, heißt Bruchgleichung.

$$\frac{1}{x-4} = -\frac{1}{x-2} \quad \text{mit } D = \mathbb{Q} \setminus \{2; 4\}$$

a) **Grafische Lösung** (siehe nebenan!)b) **Lösung durch Rechnung**

$$\frac{1}{x-4} = -\frac{1}{x-2} \quad | \cdot (x-4)(x-2) \quad \text{Mit HN multipl.}$$

$$\frac{(x-4)(x-2)}{x-4} = -\frac{(x-4)(x-2)}{x-2}$$

**Kürzen!**

$$x-2 = -(x-4)$$

**Vereinfachen!**

$$x-2 = -x+4 \quad | +x+2$$

**Nach x auflösen!**

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$3 \in D \Rightarrow L = \{3\}$$

**Probe:**

x = 3 einsetzen!

$$\frac{1}{3-4} = -\frac{1}{3-2}$$

$$-1 = -1$$

$$\text{Vereinfache: } \frac{ax-bx}{ax+bx} = \frac{(a-b) \cdot x}{(a+b) \cdot x} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{15a^2bc^2}{25abc^3} = \frac{3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b \cdot c^2}{5 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot c^3} = \frac{3 \cdot a}{5 \cdot c} = \frac{3a}{5c}$$

Fasse zusammen:

$$1 + \frac{5}{x} = \frac{x}{x} + \frac{5}{x} = \frac{x+5}{x}$$

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{1 \cdot (a-b) - 1 \cdot (a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b-a-b}{(a+b)(a-b)} =$$

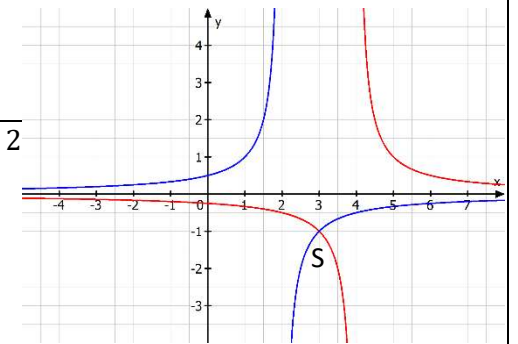
$$= \frac{-2b}{a^2 - ab + ab - b^2} = \frac{-2b}{a^2 - b^2}$$

**Beispiel zur grafischen Lösung:**

Betrachte beide Seiten der Gleichung als Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

$$g(x) = -\frac{1}{x-2}$$



Schnittpunkt S(3|-1)

 $\Rightarrow x = 3$  ist Lösung der Gleichung.**Beispiele zur rechnerischen Lösung:**a) **Beispiel Überkreuzmultiplizieren**

$$\frac{4}{x-6} = \frac{1}{x} \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 6\}$$

$$4 \cdot x = 1 \cdot (x-6)$$

$$4x = x-6 \quad | -x$$

$$3x = -6$$

$$x = -2 \quad -2 \in D \Rightarrow L = \{-2\}$$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>22. Löse die Flächenformel für ein Trapez nach a auf:</p> $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>Kürzer: <b>Überkreuzmultiplizieren:</b></p> $\frac{1}{x-4} \cdot \frac{1}{x-2}$ <p><b>Voraussetzung: Auf beiden Seiten steht ein Bruch!</b></p> $x-2 = -(x-4)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p><b>b) Beispiel Mit HN multiplizieren</b></p> $\frac{1}{x} + 5 = \frac{2}{x} \quad   \cdot x \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $1 + 5x = 2$ $5x = 1$ $x = \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \in D \Rightarrow L = \left\{\frac{1}{5}\right\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p>23. Fasse soweit wie möglich zusammen!</p> <p>a) <math>7ab^{-2} \cdot (2a^{-1}b^{-3} - 3a^{-6}b^2)</math></p> <p>b) <math>\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1}{6}x^{-1}</math></p> <p>c) <math>-x^{-2} - \frac{x^2}{x^4}</math></p> <p>d) <math>3b^2(2b - 4b^{-2})</math></p> <p>e) <math>(8x^2 + 4x) : x^{-2}</math></p> <p>f) <math>(2a)^{-3} - \frac{2}{a^3}</math></p> <p>g) <math>(x^3 - x^2 + x - 1) \cdot x^{-3}</math></p> <p>h) <math>-3(ax^3)^2</math></p> <p>i) <math>3(-a^2x)^3</math></p> <p>j) <math>(27a^2) : (9a^{-1})</math></p> <p>k) <math>\left(\frac{x^3y^4}{y^{-5}x^2}\right)^{-2}</math></p> <p>l) <math>\frac{xy}{x^3y^{-2}} : \frac{x^7y^{-3}}{xy^{-4}}</math></p> | <p><b>C. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten</b></p> <p>Der Ausdruck <math>a^n</math> heißt <b>Potenz</b>.<br/>Hierbei ist a die <b>Basis</b> und n der <b>Exponent</b>.</p> <p>Es gilt <math>a^0 = 1</math> für <math>a \neq 0</math></p> <p>und <math>a^{-n} = \frac{1}{a^n}</math> für <math>a \neq 0</math> und <math>n \in \mathbb{N}</math></p> <p><b>Potenzgesetze</b></p> <p><b>Gleiche Basis a:</b><br/>Multiplizieren/Dividieren:</p> $a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m}, a \neq 0$ <p><b>Gleicher Exponent n:</b><br/>Multiplizieren/Dividieren:</p> $a^n \cdot b^n = (ab)^n; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$ <p><b>Potenzieren</b> („Potenz einer Potenz“):</p> $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ <p><b>Rechenreihenfolge</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich</div> | <p>Mit bzw. ohne Bruchstrich geschrieben:</p> $2y^{-3} = \frac{2}{y^3}$ $(2y)^{-3} = \frac{1}{(2y)^3} = \frac{1}{8y^3}$ $x^2 \cdot (x+1)^{-2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ $\frac{y-x}{xy} = \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = x^{-1} - y^{-1}$ <p>Vereinfachen:</p> $a^3 \cdot a^{-5} \cdot (-a) = a^{-2} \cdot (-a) = \frac{-a}{a^2} = -a^{-1}$ $(ab)^4 \cdot (bc)^4 = (ab \cdot bc)^4 = (ab^2c)^4 = a^4b^8c^4$ $x^{-2} : x^2 : x^{-5} = x^{-2-2-(-5)} = x^1 = x$ $(x^4y)^{-2} : (x^2y^3)^{-2} = \left(\frac{x^4y}{x^2y^3}\right)^{-2} = \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} = \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^2 = \frac{y^4}{x^4}$ $(2a^{-2})^{-3} = 2^{-3} \cdot a^{-2 \cdot (-3)} = \frac{1}{8}a^6$ |

|                            |                                        |                                        |                               |                                               |                              |                              |                                   |
|----------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| <b>Lösungen:</b>           | 4. $A = 153,94 \text{ cm}^2$           | 9. 3,90 €                              | 13. a) $L = \{ \}$            | 17. $f(x) = \frac{1}{x+5} - 2$                | 20. a) $L = \{\frac{1}{4}\}$ | 23. a) $14b^{-5} - 21a^{-5}$ | g) $1 - x^{-1} + x^{-2} - x^{-3}$ |
| 1. a) ja                   | 5.b) $S_x(1\frac{2}{3} 0), S_y(0 2,5)$ | 10. Preis $P = 1,30\text{€}/l \cdot n$ | b) $L = \{(2 2)\}$            | 18. a) $\frac{2a^2}{3b^2}$ b) $\frac{x+1}{x}$ | b) $L = \{\frac{1}{2}\}$     | b) $-\frac{1}{12}x^{-1}$     | h) $-3a^2x^6$                     |
| b) nein                    | 6. a) $y = 2x-1$                       | $P(45 l) = 58,5 \text{ €}$             | c) $L = \{(x y)   y-2x=1,5\}$ | 19. a) $\frac{1}{a^2}$                        | 21. a) $g = \frac{fb}{b-f}$  | c) $-2x^{-2}$                | i) $-3a^6x^3$                     |
| c) ja                      | b) $y = -\frac{1}{3}x + 0,5$           | $P(60 l) = 78 \text{ €}$               | 14. a) nein                   | b) $\frac{x+y}{y-x}$                          | b) $g = 24 \text{ cm}$       | d) $6b^3 - 12$               | j) $3a^3$                         |
| d) links: nein, rechts: ja | 7. $y = -\frac{5}{6}x + 2$             | 11. Einzelzimmer: 37                   | b) ja                         | c) $\frac{a+b}{ab}$                           | 22. $a = \frac{2A}{h} - c$   | e) $8x^4 + 4x^3$             | k) $x^{-2}y^{-18}$                |
| 2. z. B. $f(-2) = -4$      | 8. a) ja b) nein                       | Doppelzimmer: 41                       | 15. 2,25 m von außen          |                                               |                              | f) $-\frac{15}{8}a^{-3}$     | l) $y^2x^{-8}$                    |
| 3. $f(x) = 2x+2$           |                                        | 12. 12                                 |                               |                                               |                              |                              |                                   |

| Standardaufgaben                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Grundwissen Wahrscheinlichkeit 5-8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Beispiele                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |      |      |      |   |                  |     |     |     |     |     |     |                     |  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |   |   |   |   |   |   |                    |    |    |    |    |    |    |                     |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|---|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------|--|--|--|--|--|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|---|---|---|---|---|---|--------------------|----|----|----|----|----|----|---------------------|------|------|------|------|------|------|
| <p>1. Bestimme die Ergebnismenge folgender Zufallsexperimente:</p> <p>a) Wurf eines Würfels</p> <p>b) Wurf zweier Würfel</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <p><b>Zufallsexperimente</b> sind Experimente, deren Ergebnis zufällig ist.</p> <p>Die Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zur <b>Ergebnismenge <math>\Omega</math></b> zusammen.</p> <p>Für die Anzahl der Elemente einer Menge <math>\Omega</math> schreibt man <math> \Omega </math> („Mächtigkeit der Menge <math>\Omega</math>“)</p> <p>Jede Teilmenge von <math>\Omega</math> entspricht einem <b>Ereignis</b>.</p> <p>Besondere Ereignisse:</p> <p><math>E_1 = \Omega</math> „sicheres Ereignis“</p> <p><math>E_2 = \{ \}</math> „unmögliches Ereignis“</p> <p>Das Ereignis E tritt ein, wenn das <b>Ergebnis <math>\omega</math></b> des Experiments ein Element von E ist.</p> | <p>Wurf einer Münze oder Wurf eines Würfels</p> <p>Wurf einer Münze:</p> <p><math>\Omega = \{ W, Z \}</math>, wobei gilt: W:Wappen, Z: Zahl</p> <p><math> \Omega  = 2</math></p> <p>Wurf eines Würfels:</p> <p>A = gerade Zahl = <math>\{ 2 ; 4 ; 6 \}</math></p> <p>B = ungerade Zahl = <math>\{ 1 ; 3 ; 5 \}</math></p> <p>C = Primzahl = <math>\{ 2 ; 3 ; 5 \}</math></p> <p>D = Zahl größer als 3 = <math>\{ 4 ; 5 ; 6 \}</math></p> <p>Würfelt man also eine 4, so sind die Ereignisse A und D eingetreten, aber nicht B und D.</p> |      |      |      |      |   |                  |     |     |     |     |     |     |                     |  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |   |   |   |   |   |   |                    |    |    |    |    |    |    |                     |      |      |      |      |      |      |
| <p>2. Bestimme die relativen Häufigkeiten für folgenden 1000-maligen Wurf eines Würfels: <math>n = 1000</math></p> <table><tr><td>Augenzahl</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>Anzahl der Würfe</td><td>166</td><td>165</td><td>165</td><td>172</td><td>168</td><td>164</td></tr><tr><td>Relative Häufigkeit</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> | Augenzahl                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 2    | 3    | 4    | 5    | 6 | Anzahl der Würfe | 166 | 165 | 165 | 172 | 168 | 164 | Relative Häufigkeit |  |  |  |  |  |  | <p>Führt man ein Zufallsexperiment <b>n-mal</b> durch und tritt dabei das Ereignis A genau <b>k-mal</b> auf, so heißt <math>\frac{k}{n}</math> die <b>relative Häufigkeit</b> diese Ergebnisses.</p> <p>Je größer n ist, umso weniger schwankt die relative Häufigkeit um einen festen Zahlenwert. Man spricht dabei vom sogenannten <b>Gesetz der großen Zahlen</b>.</p> | <p>n-maliger Wurf eines Würfels:</p> <p><math>n = 100</math></p> <table><tr><td>Augenzahl</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>Anzahl der Treffer</td><td>17</td><td>15</td><td>21</td><td>20</td><td>11</td><td>16</td></tr><tr><td>Relative Häufigkeit</td><td>17 %</td><td>15 %</td><td>21 %</td><td>20 %</td><td>11 %</td><td>16 %</td></tr></table> | Augenzahl | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Anzahl der Treffer | 17 | 15 | 21 | 20 | 11 | 16 | Relative Häufigkeit | 17 % | 15 % | 21 % | 20 % | 11 % | 16 % |
| Augenzahl                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 3    | 4    | 5    | 6    |   |                  |     |     |     |     |     |     |                     |  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |   |   |   |   |   |   |                    |    |    |    |    |    |    |                     |      |      |      |      |      |      |
| Anzahl der Würfe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 166                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 165                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 165  | 172  | 168  | 164  |   |                  |     |     |     |     |     |     |                     |  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |   |   |   |   |   |   |                    |    |    |    |    |    |    |                     |      |      |      |      |      |      |
| Relative Häufigkeit                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |      |      |      |   |                  |     |     |     |     |     |     |                     |  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |   |   |   |   |   |   |                    |    |    |    |    |    |    |                     |      |      |      |      |      |      |
| Augenzahl                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 3    | 4    | 5    | 6    |   |                  |     |     |     |     |     |     |                     |  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |   |   |   |   |   |   |                    |    |    |    |    |    |    |                     |      |      |      |      |      |      |
| Anzahl der Treffer                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 17                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 15                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 21   | 20   | 11   | 16   |   |                  |     |     |     |     |     |     |                     |  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |   |   |   |   |   |   |                    |    |    |    |    |    |    |                     |      |      |      |      |      |      |
| Relative Häufigkeit                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 17 %                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 15 %                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 21 % | 20 % | 11 % | 16 % |   |                  |     |     |     |     |     |     |                     |  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |   |   |   |   |   |   |                    |    |    |    |    |    |    |                     |      |      |      |      |      |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |      |      |      |   |                  |     |     |     |     |     |     |                     |  |  |  |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |   |   |   |   |   |   |                    |    |    |    |    |    |    |                     |      |      |      |      |      |      |

3. Bestimme, wie viele verschiedene (auch unsinnige) Wörter man mit den Buchstaben des Wortes

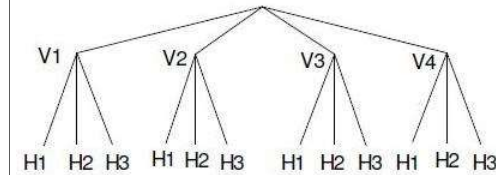
- a) EUROPA
- b) MUENCHEN
- c) SOMMERFERIEN schreiben kann.

Mit **Baumdiagrammen** oder allgemeiner nach dem **Zählprinzip** lässt sich die Gesamtzahl an Möglichkeiten ermitteln.

5 verschiedene Buchstaben können zu  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$  („5 Fakultät“) = 120 verschiedenen Worten zusammengesetzt werden.

Achtung: Die Buchstaben des Wortes SOMMERMONAT können zu  $\frac{11!}{2! \cdot 3!} = 3326400$  verschiedenen Wörtern zusammengesetzt werden, da der Buchstabe O 2-mal und der Buchstabe M 3-mal vorkommt.

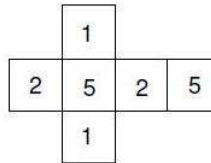
Ein Restaurant bietet für das Mittagsmenü 4 Vorspeisen und 3 Hauptgerichte an.



Es gibt  $4 \cdot 3 = 12$  Möglichkeiten für die Zusammenstellung der Speisen.

4. Petra wirft den Würfel mit dem abgebildeten Netz zweimal. Zeichne ein Baumdiagramm und bestimme die Wahrscheinlichkeiten für

- A = Mindestens eine 2
- B = Augensumme  $> 4$
- C = Augendifferenz  $> 2$
- D = Keine 5



Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn jedes der möglichen Ereignisse **gleich wahrscheinlich** ist. Bei Laplace-Experimenten gilt für die Wahrscheinlichkeit  $P(E)$  eines Ereignisses E:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Eine Laplace-Münze wird 5-mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse.

A = Genau 4-mal Wappen

B = Mindestens 2-mal Wappen

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32} \quad \text{und} \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{26}{2^5} = \frac{26}{32}$$